

TD Espaces euclidiens

Produit scalaire

53Q **Exercice 1** 🏠 Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

SBJ **Exercice 2** 🍂 On considère $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur E .

$$\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

F68 **Exercice 3** IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME

1. Montrer que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
2. Interpréter géométriquement cette relation, en considérant le parallélogramme engendré par les vecteurs x et y .

U77 **Exercice 4** 🍂 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$. Montrer que $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.

3QW **Exercice 5** ★ FAMILLE OBTUSANGLE MAXIMALE Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle x_i, x_j \rangle < 0$ pour $i \neq j$.

1. Montrer que si $\sum \lambda_i x_i = 0$ est une relation de liaison non triviale, tous les λ_i ont le même signe et qu'ils sont tous non nuls.
2. Montrer que $p \leq n + 1$. On suppose dans la suite que $p = n + 1$.
3. Montrer que la famille (x_i) est génératrice.
4. Montrer qu'il existe une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de vecteurs unitaires tels que $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle = -\alpha$, où $\alpha > 0$.
Ces vecteurs sont les sommets d'un simplexe régulier.
5. On classe des plantes par 100 attribus qu'elles peuvent avoir, ou ne pas avoir. Deux plantes sont dissimilaires si elles sont différentes sur au moins 51 attribus. Montrer qu'il ne peut pas y avoir 101 plantes toutes dissimilaires les unes des autres.

Orthogonalité

Z1F **Exercice 6** 🍂 1. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E qui vérifie $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$. Montrer que $\text{Ker } u = (\text{Im } u)^\perp$.

2. Vérifier que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique, alors $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.

F85 **Exercice 7** Soit E un espace préhilbertien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Si $F \subset G$, comparer $F^\perp$ et $G^\perp$ pour l'inclusion.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
3. Montrer que $(F \cap G)^\perp \supset F^\perp + G^\perp$
4. Si E est euclidien, montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

PEJ **Exercice 8** 🍂 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{ker } A \subset \text{ker } A^T A$.
2. Pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que $Y = \vec{0} \Leftrightarrow Y^T Y = 0$.
3. Montrer que $\text{ker } A^T A \subset \text{ker } A$.
4. En déduire que $\text{rang } A = \text{rang } A^T A$.

JZ5 **Exercice 9** Dans $E = C^1([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, on considère

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [-1,0], f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}.$$

1. Montrer que $F \perp G$.
2. Montrer que $F^\perp = G$.
3. F et G sont-ils supplémentaires?

TEZ **Exercice 10** REPRÉSENTATION DES FORMES LINÉAIRES Soit φ une forme linéaire sur E , montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

PCM **Exercice 11** Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ strictement positifs tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^n x_k^{-1} \geq n^2$.

HXP **Exercice 12** 🍂 Soit $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

1. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $x \in [a,b], |f(x)|^2 \leq (x-a) \int_a^b |f'(t)|^2 dt$.
2. En déduire que $\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt$.

AEY **Exercice 13** Soit (u_n) positive telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

2AL **Exercice 14** Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
2. Montrer que $|\text{Tr } A| \leq \sqrt{n} \|A\|$.

DCB **Exercice 15** ★ Soit E un ensemble de cardinal n et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et telle que $\text{Card}\{(x, y) \in E^2 \mid x\mathcal{R}y\}$ soit de cardinal p . Montrer que $n^2 \leq kp$.

BON

C4U **Exercice 16** 🍂 Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. On pose $H = \{Q \in E \mid Q(a_0) = 0\}$ et $P_0 = (X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n)$. Montrer que $P_0^\perp = H$.
3. Déterminer une BON de E .

- V90 Exercice 17** Soit E un espace préhilbertien et $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs de E tels que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$.
1. On suppose E de dimension n et que les e_i sont unitaires. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E .
 2. On suppose E de dimension n . Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E .
 3. On suppose $(e_1, \dots, e_n)$ libre. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E .

Projecteurs

- BRE Exercice 18**  Soit $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que M est la matrice d'une projection orthogonale.
- QK0 Exercice 19**  Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale p sur le plan $H: x + y + z = 0$.
- HTV Exercice 20**  Soit E un espace euclidien de dimension n , p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E .
1. Montrer que $\forall x \in E, \|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$.
 2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.
- YN1 Exercice 21**   1. Que vaut $\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner une expression simple de la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- IHB Exercice 22** Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien.
1. Montrer que $\forall x, y \in E, \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$. On dit que p est symétrique.
 2. Montrer que la matrice de p dans une base orthonormale est symétrique.
- PA3 Exercice 23** CARACTÉRISATION DES PROJECTEURS ORTHOGONAUX Soit p un projecteur de E euclidien. Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
- Indication :** Considérer la quantité $\|p(x + ty)\|^2$, pour x, y judicieux.

Orthonormalisation

- MY2 Exercice 24**   Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$.
1. Déterminer une base orthonormale de P .
 2. Déterminer une base orthonormale de $P^\perp$.
- OY6 Exercice 25**  **PRODUITS SCALAIRES INTÉGRALES SUR $\mathbb{R}_n[X]$** Soit w une fonction continue strictement positive sur $[-1, 1]$.
1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 w(t)P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire.
 2. Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ la famille obtenue à partir de la base (X^k) par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Montrer que $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$.
 3. Montrer que pour $1 \leq k \leq n$, P_k possède k racines distinctes dans $] -1, 1[$.
- Indication :** Supposer par l'absurde que P_k change de signe au plus $k - 1$ fois. Écrire que P_k est orthogonal à un polynôme choisi judicieusement.
4. Montrer qu'il existe des réels a_i, b_i tels que $P_i = (x + a_i)P_{i-1} - b_iP_{i-2}$ et que $b_i > 0$.
 5. Montrer que les racines de P_i sont entrelacées avec celles de P_{i-1} , c'est-à-dire qu'en notant $a_1, \dots, a_i$ celles de P_i et $b_1, \dots, b_{i-1}$ celles de P_{i-1} , on a $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{i-1} < b_i$.

Distance

- 5DY Exercice 26**  On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.
1. Déterminer le projeté orthogonal R de $P = X^2$ sur $F = \text{Vect}(1, X)$.
 2. On considère $\Delta = \inf_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (X^2 - aX - b)^2 dX$. Exprimer Δ en fonction de R et P .
 3. Calculer la base orthogonale (B_0, B_1) de F obtenue à partir de la base $(1, X)$ par le procédé de Gram-Schmidt.
- Justifier que $\Delta = \|P\|^2 - \frac{\langle P, B_0 \rangle^2}{\langle B_0, B_0 \rangle} - \frac{\langle P, B_1 \rangle^2}{\langle B_1, B_1 \rangle}$. En déduire que $\Delta = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} - \frac{1}{12}$.
- YDU Exercice 27** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\inf_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (s_{ij} - a_{ij})^2$.
- 4S7 Exercice 28** Soit $n \geq 1$ et $\varphi: P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \sum_{i=0}^n (i^n - P(i))^2$.
1. En introduisant un produit scalaire montrer que φ admet un minimum.
 2. Déterminer une BON $(L_0, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.
 3. Construire une base $Q_1, \dots, Q_n$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\forall i \neq j, \langle Q_i, Q_j \rangle = 1$.
 4. Expliciter, en fonction des Q_i , le vecteur directeur de l'orthogonal $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
 5. En déduire le minimum de φ .
- Ind :** Prendre $Q_i = L_0 + c_i L_i$.
- PBN Exercice 29**   **MATRICE DE GRAM** Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E . On considère la matrice de Gram
- $$G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$
1. Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_i)_{i \leq n}$ est liée.
 2. Soit F un sous-espace de E et $(x_1, \dots, x_p)$ une base de F . Si $x \in E$ montrer que la distance de x à F est $d^2 = \frac{\det G(x, x_1, \dots, x_p)}{\det G(x_1, \dots, x_p)}$.